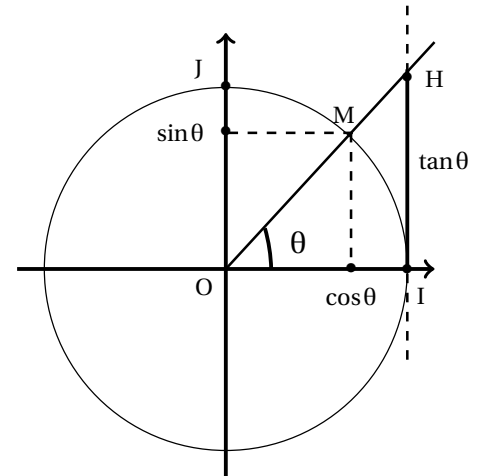


TRIGONOMETRIE

■ CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ et soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

- $\cos \theta \stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'abscisse du point } M$.
- $\sin \theta \stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'ordonnée du point } M$.
- $\tan \theta \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \overline{IH}$.



■ COSINUS ET SINUS DES ANGLES USUELS.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfinie

■ COSINUS ET SINUS DE $\pi + x$, DE $\frac{\pi}{2} + x$



$$\blacksquare \cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad \blacksquare \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \blacksquare \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\blacksquare \sin(\pi + x) = -\sin(x) \quad \blacksquare \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \blacksquare \sin(-x) = -\sin(x)$$

■ FORMULES D'ADDITION $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$



$$\blacksquare \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\blacksquare \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\blacksquare \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\blacksquare \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

■ CAS PARTICULIER DES FORMULES DE DUPLICATION : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$



$$\blacksquare \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\blacksquare \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\blacksquare \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\blacksquare \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\blacksquare (\cos x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\blacksquare (\sin x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

■ LINÉARISATION DE $\cos a \cos b$, $\sin a \sin b$, $\sin a \cos b$.



$$\blacksquare \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\blacksquare \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\blacksquare \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

■ FACTORISATION DE $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$, $\sin a + \sin b$.



$$\blacksquare \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

■ EXPRESSION DE $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ EN FONCTION DE $t = \tan \frac{x}{2}$.



$$\blacksquare \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\blacksquare \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\blacksquare \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

■ ÉQUATIONS TRIGONOMETRIQUES USUELLES.



$$\blacksquare \cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b[2\pi] \text{ ou } a = -b[2\pi]$$

$$\blacksquare \sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b[2\pi] \text{ ou } a = \pi - b[2\pi]$$

$$\blacksquare \tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b[\pi].$$

■ L'EXPRESSION DE $a \cos(x) + b \sin(x)$



$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

où φ est défini par :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

EXERCICE

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

$$\blacksquare \cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$$

$$\blacksquare \cos^4 x + \sin^4 x = 1$$

$$\blacksquare \sin x + \sin 3x = 0$$

$$\blacksquare \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\blacksquare 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$$

$$\blacksquare 2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$$

■ INÉGALITÉS CLASSIQUES

EXERCICE

1. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leq x$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

■ LINÉARISATION DE $\cos^n x \sin^n x$



Formules d'Euler :

$$\blacksquare \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\blacksquare \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

EXERCICE

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

3) $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x dx$



Formules importantes

$$\blacksquare e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\blacksquare e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

$$\blacksquare e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\blacksquare 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

■ EXPRESSION DE $\cos n\theta$ ET $\sin n\theta$ EN FONCTION DE $\cos \theta$ ET $\sin \theta$



Formule de Moivre

$$\blacksquare (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\blacksquare (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

EXERCICE

Soient $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

- Exprimer $\cos(n\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$. On trouvera $\cos(n\theta) = P(\cos \theta)$ où P est un polynôme de la forme suivante :

$$P(X) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k$$

- Montrer que

$$\sin n\theta = \sin \theta \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-(2k+1)} \theta (1 - \cos^2 \theta)^k$$