TD1 : LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Exercices d'entrainement

CONNECTEURS, QUANTIFICATEURS

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

- f n'est pas paire
- f s'annule sur $\mathbb{R}$
- f n'est pas constante
- f est croissante
- f est périodique
- f n'est pas la fonction nulle

Exercice 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction a valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des assertions suivantes :

- $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \neq 0$
- $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| \leq \mathrm{M}$
- $\forall x, y \in \mathrm{I}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- $\forall \mathrm{M} > 0, \exists \mathrm{A} > 0, \forall x \geq \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathrm{I}, f(x) = y$
- $\forall x, y \in \mathrm{I}, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
- $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, (|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Traduire à l'aide de quantificateurs chacune des assertions suivantes. On en donnera également la négation.

(i) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est nulle.
(ii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
(iii) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante.
(iv) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend que des valeurs strictement inférieures à 2 .
(v) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
(vi) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'annule au plus une fois.

Exercice 4

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. " $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ " et " $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ "
2. " $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ " et " $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ "
   Donner un exemple (tracer) deux fonctions f et g toutes deux non nulles sur $\mathbb{R}$ mais dont le produit est nulle sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est bornée si

$$\exists \mathrm{M}\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leqslant \mathrm{M}$$

1. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « f n'est pas bornée».
2. Donner un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction qui ne l'est pas.
3. Quelles sont les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant la propriété
$$\forall x\in\mathbb{R}, \exists \mathrm{M}\in\mathbb{R} : |f(x)|\leqslant \mathrm{M}$$
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\exists a,b\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathbb{R}, a\leqslant f(x)\leqslant b$$
5. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\exists a,b\in\mathbb{R} : \forall x,y\in\mathbb{R}, a\leqslant f(x)-f(y)\leqslant b$$

MODES DE RAISONNEMENT

EXERCICE 6

Une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) admet la limite l en a si

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \eta>0, \quad \forall x\in]a-\eta, a+\eta[, \quad |f(x)-l|\leq\varepsilon$$

Montrer l'unicité de la limite de f en a.

EXERCICE 7

1. Montrer que $\forall x,y\in\mathbb{R}: \quad 4xy\leq(x+y)^2$.
2. En déduire que pour tous $x,y,z>0$:
$$\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{yz}{y+z}\leq\frac{x+y+z}{2}$$

EXERCICE 8

Soient $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\in\mathbb{R}$, Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i=1 \Longrightarrow \exists i\in[|1,n|], \quad x_i\geq\frac{1}{n}$

EXERCICE 9

Soit $a\in]0,+\infty[$

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{Z}, \quad 0\leqslant x-\dfrac{k}{2^n}a<\dfrac{a}{2^n}$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la somme $n+m$ soit impaire et le produit nm soit pair.

Exercice 11

Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5 ,Montrer que 24 divise p^2-1

Exercice 12

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.
2. Énoncer et démontrer une formule analogue pour $\min(a,b)$.

Exercice 13

Déterminer les solutions f de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geqslant x$. Montrer que $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

Exercice 15

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, \ \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} + \varepsilon) \Longrightarrow \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$.

Exercice 16

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \ \big(x \notin \mathbb{Q}$ ou $\exists n \in \mathbb{N}^* : nx \in \mathbb{Z}\big)$.

Exercice 17

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m)$$

Exercice 18

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = x$
Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x$